Université de Marne-la-Vallée **Licence L2.1**
1er semestre 2006/2007 **Algèbre**

TD 3 : Réduction des endomorphismes

Exercice 1. (Projections) Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = f$.

1. Montrer que les seules valeurs propres possibles pour f sont 0 et 1.
2. Montrez que $\mathrm{Im}(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
4. En déduire qu'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale, avec des 0 ou des 1 sur la diagonale.
5. Diagonaliser la matrice
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (Symétries) Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = Id$.

1. Montrer que les seules valeurs propres possibles pour f sont -1 et 1.
2. On pose $A_1 = \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $A_{-1} = \mathrm{Ker}(f + Id)$. Montrer que, pour tout $x \in E$, $x + f(x) \in A_1$ et $x - f(x) \in A_{-1}$.
3. Montrer que $E = A_1 \oplus A_{-1}$.
4. En déduire qu'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale, avec des 1 ou des -1 sur la diagonale.
5. Diagonaliser la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soient m un réel, et la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculez, en fonction de m, le déterminant de A_m.
2. Quel est le rang de A_1 ? de A_{-2} ?
3. Quel est le polynôme caractéristique de A_m ? Quelles sont les valeurs propres de A_m ?
4. La matrice A_m peut-elle avoir une seule valeur propre ? Pour quelles valeurs de m la matrice A_m a-t-elle seulement deux valeurs propres distinctes ?
5. En déduire que si $m \notin \{1, -1/2\}$, la matrice A_m est diagonalisable.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On définit les applications ϕ, ψ, ξ de E dans E de la manière suivante :

$$\phi : P(X) \longrightarrow P'(X), \qquad \psi : P(X) \longrightarrow XP'(X), \qquad \xi : P(X) \longrightarrow \int_0^X P(t)\,dt.$$

1. Vérifier que ϕ, ψ, ξ sont des applications linaires sur un espace vectoriel.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces applications linéaires.

Exercice 5. (Endomorphismes de rang 1) Soit f un endomorphisme de E de rang 1.

1. En écrivant la matrice de f dans une base bien choisie, montrez que le polynôme caractéristique de f est de la forme
$$P(\lambda) \;=\; (-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda - a),$$
où $a = \mathrm{trace}(f)$. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Montrez que, si $\mathrm{trace}(f) = 0$, f n'est pas pas diagonalisable.
3. On suppose que $\mathrm{trace}(f) \neq 0$. Montrez que f est diagonalisable.

Exercice 6. Pour quelles valeurs de a la matrice suivante est-elle diagonalisable ?
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 2a-5 & 5-a \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient a, b, c trois réels et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 8. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice ?
2. Trouver une base de vecteurs propres.
3. Ecrire la matrice de passage et calculer son inverse.
4. Calculer A^n
5. Calculer $A(A-I)(A-2I)$

Exercice 9.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A et donner une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale.
2. Montrer que B n'est pas diagonalisable. Donner une matrice triangulaire semblable à B.

Exercice 10. Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et P le polynôme de degré n donné par
$$P(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots a_1\lambda - a_0\right).$$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caratéristique de A est P.
2. Soient f un endomorphisme de E et un vecteur $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ soit libre. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ tel que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit egale à A.

Exercice 11. Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice p ($f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$).

1. Montrez que 0 est valeur propre et que c'est la seule.
2. Soit $u \in E$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0$. Démontrer que les vecteurs $u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)$ sont linéairement indépendants. En déduire que $p \leq n$.
3. Démontrer que f est nilpotent d'ordre n si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice $M = (m_{ij})$ de f dans $\mathcal{B}$ vérifie

$$m_{ij} = 0 \quad \text{si } j \neq i+1 \qquad \text{et} \qquad m_{i,i+1} = 1.$$

Exercice 12. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A est une matrice inversible. Démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
2. Supposons maintenant A non inversible. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout t de $\mathbb{C}$, $0 < |t| < \alpha$, $A - tI$ est inversible.
3. En déduire que le résultat de la question 1 est encore valable si A n'est pas inversible.

Exercice 13. (Examen M3 de Janvier 92) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres de A.
2. Indiquer, sans faire les calculs, une méthode pour calculer A^n pour n entier, et l'inverse A^{-1} de A.
3. Soit B une matrice 3×3 telle que $AB = BA$. Calculer $AB(v_i)$, pour $1 \leq i \leq 3$ et en déduire que B est diagonalisable.

Exercice 14. Pour $n \geq 3$, on considère la matrice carrée M de taille n définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de M d'ordre $n-2$.
2. Montrer que M est diagonalisable (on s'intéressera aux autres valeurs propres de M).

Exercice 15. Soit M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, non proportionnelle à la matrice identité et admettant une unique valeur propre réelle triple λ_1. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$M^k A = 0 \Longleftrightarrow MA = 0.$$

Exercice 17. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable et expliciter une matrice D diagonale semblable à A.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Expliciter en fonction de n les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} u_{n+1} = & u_n & + & 3v_n \\ v_{n+1} = & 3u_n & + & v_n \end{array} \right. ,$$

   avec $v_0 = c$ et $w_0 = 1$.

Exercice 18. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} u_{n+1} = & \frac{1}{4} & (2u_n & + & v_n & + & w_n) \\ v_{n+1} = & \frac{1}{3} & (u_n & + & v_n & + & w_n) \\ w_{n+1} = & \frac{1}{4} & (u_n & + & v_n & + & 2w_n) \end{array} \right. ,$$

avec $u_0 = 0, v_0 = 22$ et $w_0 = 22$. Calculer $u_n,\ v_n,\ w_n$ et étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 19. On cherche à trouver les valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n, u_0 et u_1, lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par réccurence de la manière suivante :

$$u_{n+1} = b\,u_n + c\,u_{n-1}.$$

1. Montrer que le problème revient à trouver en fonction de n, u_0, u_1 les valeurs des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{rccc} u_{n+1} = & bu_n & + & cv_n \\ v_{n+1} = & u_n & & \end{array} \right. .$$

2. En déduire que si le polynôme $x^2 - b\,x - c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2, on a,

$$u_n = A\,x_1^n + B\,x_2^n,$$

   où A et B sont des constantes qui s'expriment en fonction de u_0 et u_1.
3. Soit I la matrice identité d'ordre 2 et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $(zI + yJ)^n$ en fonction de I, J, n et des constantes y et z.
4. Montrer que si le polynôme $x^2 - b\,x - c$ admet une seule racine x_1, on a,

$$u_n = (A + nB)\,x_1^n,$$

   où A et B sont des constantes qui s'expriment en fonction de u_0 et u_1.
5. Appliquer les résultats obtenus à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u_{n+1} = u_n + \alpha\,u_{n-1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   En particulier, on montrera que si $\alpha < -\frac{1}{4}$, alors u_n se met sous la forme

$$u_n = (\sqrt{-\alpha})^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

Exercice 20. Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice 21. Soient $u_0 > 0, \ u_1 > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{2}{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n}}$$

Calculer u_n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1} \\ u_{2n} = u_{2n-1} + 2u_{2n-2} \end{cases},$$

et $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$. Calculer u_n en fonction de n.